DYNAMIQUE DES FLUIDES ET DES PLASMAS

PHYS-F412 - Bernard Knaepen

I DESCRIPTION D'UN FLUIDE

1.1 Introduction

→ On va assimiler un fluide à un milieu continu. Le milieu est suffisamment dense pour que ses propriétés moyennes puissent être correctement définies localement.

→ On introduira la notion de particule de fluide

1.2 Définitions et notions préliminaires

DEF La vitesse du fluide $\vec{u}$ est définie en un point de l'espace à chaque instant selon:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = [u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t)]$$

DEF Un écoulement est dit stationnaire si $\partial_t \vec{u} = 0$

(stationnaire ⇔ indépendant du temps)

→ exemple : écoulement stationnaire bi-dimensionnel :

$$\vec{u} = [u(x,y), v(x,y), 0]$$

⊙ Deux descriptions possibles :

→ Il est possible de traiter le fluide comme un champs :

$\forall$ grandeur, $\exists$ champ (exemple : densité $\rho(x,y,z,t)$).

C'est une description Eulerienne.

→ Alternativement, on peut traiter le fluide comme une collection de particules de fluide {A}. La densité de la particule de fluide "A" est alors $\rho_A(t)$. C'est une description Lagrangienne.

⊙ Liens entre les 2 descriptions :

→ Une particule de fluide qui se trouve au point $\vec{x}_A$ possède une densité $\rho_A(t) = \rho(\vec{x}_A, t)$

→ Que vaut $\rho_A(t+dt)$?

$$\rho_A(t+dt) = \rho(\vec{x}_A + \overbrace{\vec{u}(\vec{x}_A,t)dt}^{\text{déplacement de la part. de fluide}}, t+dt)$$

$$\simeq \rho(\vec{x}_A,t) + \partial_t \rho \, dt + \frac{\partial \rho}{\partial x^j} u^j(\bar{x}_A,t)\, dt$$

$$= \rho(\bar{x}_A,t) + \left\{ \partial_t \rho + (\vec{u}.\vec{\nabla})\rho \right\} dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\rho_A = \partial_t \rho + (\bar{u}.\bar{\nabla})\rho$$

DEF Soit $y = y(\bar{x},t)$ un champ tensoriel. On définit sa dérivée matérielle D/Dt selon :

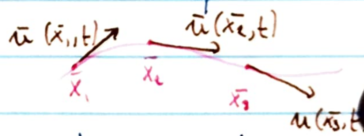
$$\frac{Dy}{Dt} \equiv \frac{\partial y}{\partial t} + (\vec{u}.\vec{\nabla})\,y$$

→ Dérivée matérielle de la vitesse du fluide :

$$\frac{d\bar{u}_A}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u}$$

⊙ Ligne de courant :

DEF On définit une ligne de courant comme une courbe qui est partout tangente à la vitesse $\vec{u}$ (à un certain instant t.)



→ Puisque $\bar{u} = \bar{u}(t)$, les lignes de courants peuvent varier et ne correspondent pas forcément avec les trajectoires des particules.

Prop Si un écoulement est stationnaire, trajectoire = ligne de courant.

Preuve : Soit $\bar{x}(s)$ une ligne de courant. Alors

$$f(\bar{x}+d\bar{x}) \simeq f(\bar{x}) + (d\bar{x}.\bar{\nabla})f \leadsto \delta f = (d\bar{x}.\bar{\nabla})f \propto (\bar{u}.\bar{\nabla})f$$

↳ Si $(\bar{u}.\bar{\nabla})f = 0$, alors $f = $ cste sur cette ligne de courant

→ Si $(\bar{u}.\bar{\nabla})f = 0$, cela signifie qu'elle est constante le long d'une ligne de courant, mais ça ne veut pas dire qu'elle prend la m̂ valeur sur toutes les lignes de courant.

En effet, $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \partial_t f + (\bar{u}.\bar{\nabla})f = 0$

1.3 Equation du mvt pour un fluide idéal

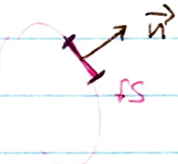
DEF Un fluide est dit idéal si :

① Il est incompressible (les particules de fluides ne changent pas de volume lors de leur déplacement).

? ② Sa densité est une constante $\forall \bar{x}, \forall t$

③ La force exercée par le fluide sur son environnement est normale à la surface : $\delta\vec{F} = p\,\vec{n}\,\delta S$

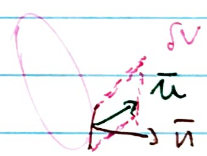
(Fluide non visqueux).



⊙ Conséquence de l'incompressibilité :

→ Soit un volume fixe de l'espace V. La quantité de masse qui quitte ce volume par unité de temps est

$$\frac{dM}{dt} = -\int_{\partial V} \rho\, \bar{u}.\bar{n}\, dS$$



$$= \int_V \rho . \vec{\nabla}(\bar{u}) = -\int_V \bar{\nabla}(\rho\bar{u})\, dV \overset{!}{=} 0$$

$\delta M = \rho\,\delta V$

On trouve que $\bar{\nabla}.\bar{u} = 0$

→ Même dans le cas où ρ varie dans l'espace, avec chaque PDF qui garde sa densité lors de son déplacement, la condition $\bar{\nabla}.\bar{u} = 0$ reste valable. En effet :

$$\dot{M} = \frac{d}{dt}\int \rho\, dV = -\frac{d}{dt}\int dV\, \bar{\nabla}(\rho\bar{u})$$

$$\dot{M} = \int \partial_t \rho\, dV$$

$\partial_t \rho + \bar{\nabla}(\rho\bar{u}) = 0$ Conservation de la masse

Or, si le fluide est idéal, par ①, $\partial_t \rho + (\bar{u}.\bar{\nabla})\rho = \dot{\rho} = 0$

Donc $\partial_t \rho + \rho(\bar{\nabla}.\bar{u}) + (\bar{u}.\bar{\nabla})\rho = \rho.(\bar{\nabla}.\bar{u}) = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}.\bar{u} = 0$

⊙ Force totale exercée sur une PDF :

→ Soit une PDF délimitée par une surface S.

→ La force qu'exerce l'extérieur sur la PDF est $\delta \bar{F}_s = -p\bar{n}.\delta S$.

La force totale vaut : $\bar{F}_s = -\int_{\partial V} p.\bar{n}\,\delta S = \int_V -\bar{\nabla} p.\,dV$

→ Si on rajoute les forces de volume (ici la gravité), on a :

$$\bar{F} = \int_V (-\bar{\nabla} p + \rho\bar{g})\,dV$$

⊙ Equation d'Euler :

→ Soit un élément de fluide ∞-ale. Alors

$$\delta\bar{F} \simeq (-\bar{\nabla} p + \rho\bar{g})\,\delta V$$

On applique $\delta\bar{F} = \delta m.\bar{a}$:

$$\rho\,\delta V \frac{d\bar{u}}{dt} = (-\bar{\nabla} p + \rho\bar{g})\,\delta V$$

DEF $\Rightarrow \rho \dfrac{d\bar{u}}{dt} = -\bar{\nabla} p + \rho\bar{g}$ Equation d'Euler (1)

→ On peut développer : $\rho\left(\partial_t \bar{u} + (\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u}\right) = -\bar{\nabla} p + \rho\bar{g}$

↳ On peut réécrire le champ de pesanteur comme :

$\rho.\bar{g} = \bar{\nabla}(\rho\bar{g}\bar{x}) = -\bar{\nabla}\rho\chi$ où $\chi \equiv -\bar{g}\bar{x}$

On a alors : $-\bar{\nabla} p + \rho g = -\bar{\nabla} p - \bar{\nabla}(-\rho\bar{g}.\bar{x})$

$$= -\bar{\nabla}(p')$$

avec $p' \equiv p + \rho\chi = p - \rho\bar{g}.\bar{x}$.

↳ On peut également réécrire $(\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u}$:

$(\bar{u}.\bar{\nabla}).\bar{u} = u_j\partial_j u_i = (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} + \bar{\nabla}(\frac{1}{2}u^2)$

En effet : $(\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} + \bar{\nabla}(\frac{1}{2}u^2)$

$= \epsilon_{ijk}(\bar{\nabla}\times\bar{u})_j u_k + \partial_i \frac{1}{2} u_j u_j$

$= \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}\partial_l u_m u_k + \partial_i \frac{1}{2} u_j u_j$ $\qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm} = \epsilon_{jki}\epsilon_{jlm}$

$= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\partial_l u_m u_k) + \frac{1}{2}\partial_i u_j u_j$

$= \partial_k u_i u_k - \partial_i u_k u_k + \frac{1}{2}\partial_i u_j u_j$

$= u_i\partial_j u_j + u_j\partial_j u_i - 2u_j\partial_i u_j + u_j\partial_i u_j = u_j\partial_j u_i$ ☒

On a alors $\rho\left[\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} + \bar{\nabla}\left(\frac{1}{2}u^2\right)\right] = -\nabla(p+\rho\chi)$

$$\Leftrightarrow \partial_t u + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\chi\right) - \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right)$$

On trouve l'équation d'Euler (2) :

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\bar{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}+\chi+\frac{1}{2}\bar{u}^2\right)$$

⊙ Theorème de Bernoulli :

Thm Pour un fluide idéal indépendant du temps,

$$H \equiv \frac{p}{\rho} + \chi + \frac{1}{2}u^2 = \text{cste}\Big|_{\text{ligne de courant}} \Leftrightarrow (\bar{u}.\bar{\nabla})H = 0$$

Preuve Si l'écoulement ne dépend pas du temps, on a :

$$(\bar{\nabla}\times\bar{u})\times\bar{u} = -\nabla H \qquad \| \cdot \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{u}.\bar{\nabla})H = 0$$

↳ Pour un fluide idéal stationnaire, H est cst le long des lignes de courant.

DEF Un fluide est dit irrotationnel si $\bar{\nabla}\times\bar{u} = 0$

DEF On définit la vorticité par $\omega \equiv \bar{\nabla}\times\bar{u}$

↳ Un fluide est irrotationnel si sa vorticité est nulle.

Thm (Bernoulli pour un fluide irrotationnel). Pour un fluide idéal, stationnaire et irrotationnel, on a :

$$\bar{\nabla}.H = 0$$

Preuve Si $\partial_t u = 0$ et $\bar{\omega} = 0$, l'équation d'Euler (2) se réduit à

$$0 = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\chi+\frac{1}{2}\bar{u}^2\right)$$

1.4. Vorticité

⊙ Equation d'évolution (Euler):

→ Par Euler (2), on a:

$$\partial_t \bar u + \bar\omega \times \bar u = -\bar\nabla H \qquad \| \nabla\times\cdot$$

$$\Leftrightarrow \partial_t \bar\omega + \nabla\times(\bar\omega\times\bar u) = 0 \qquad \text{car } \bar\nabla\times(\bar\nabla\varphi)=0$$

$$\Leftrightarrow \partial_t\bar\omega + (\bar u\cdot\bar\nabla)\bar\omega - (\bar\omega\cdot\bar\nabla)\bar u + (\underbrace{\bar\nabla\cdot\bar u}_{0})\bar\omega - (\underbrace{\bar\nabla\cdot\bar\omega}_{0})\bar u = 0$$

On trouve $\partial_t\bar\omega + (\bar u\cdot\bar\nabla)\cdot\bar\omega = (\bar\omega\cdot\bar\nabla)\cdot\bar u$

$$\Leftrightarrow \frac{D\bar\omega}{Dt} = (\bar\omega\cdot\bar\nabla)\cdot\bar u \qquad \text{version générale}$$

⊙ Cas d'un fluide à 2-D:

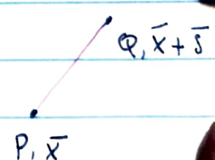
→ Sa vitesse est donnée par: $\bar u = [u(x,y,t), v(x,y,t), 0]$

↳ $\bar\omega = [0, 0, \omega(x,y,t)]$

↳ $(\bar\omega\cdot\bar\nabla)\bar u = \omega\,\partial_z\bar u = 0$

On trouve $\dfrac{D\omega}{Dt} = 0$

⊙ Décomposition cinématique du champ de vitesse.



→ Evaluons la ≠ de vitesses de 2 points voisins:

$$\bar u_Q \simeq \bar u_P + (\bar s\cdot\bar\nabla)\bar u$$

$$u_{Q_i} = u_{P_i} + s_j\,\partial_j u_i$$

$$= u_{P_i} + s_j\left(\underbrace{\overbrace{\tfrac12(\partial_j u_i + \partial_i u_j)}^{\text{sym}}}_{e_{ji}} + \underbrace{\overbrace{\tfrac12(\partial_j u_i - \partial_i u_j)}^{\text{antisym}}}_{\tilde e_{ji}}\right)$$

$$= u_{P_i} + s_j e_{ji} + s_j \tilde e_{ji}$$

$$= u_{P_i} + \partial_{s_i}\left(\tfrac12 s_i s_j e_{ij}\right) + s_j\tilde e_{ji}$$

Or, $\frac12(\omega\times s)_i = \frac12\epsilon_{ijk}\,\omega_j s_k = \frac12\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{jlm}\,\partial_l u_m s_k$ → $\epsilon_{jki}\,\epsilon_{jlm}$

? $= \frac12(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{km})\,\partial_l u_m s_k = \frac12(\partial_k u_i s_k - \partial_i u_k s_k)$

$= -\tilde e_{ik} s_k = \tilde e_{ki} s_k$

$$\bar u_Q = \bar u_P + \underbrace{\tfrac12(\bar\omega\times\bar s)}_{\text{rotation autour de P}} + \underbrace{\bar\nabla_s\left(\tfrac12 e_{ij} s_i s_j\right)}_{\text{matrice symétrique} \to \text{diagonalisable}}$$

→ Diagonalisons : $\vec{\nabla}_s\left(\frac{1}{2} e_{ij} s_i s_j\right)$

On trouve $s_i s_j e_{ij} = e'_{11}(s_1')^2 + e'_{22}(s_2')^2 + e'_{33}(s_3')^2$

Si on place notre système d'axe au point P, on a :

$\bar{u}_Q - \bar{u}_P = \delta \bar{u}|_{\bar{P}} = \begin{pmatrix} e'_{11} s_1' \\ e'_{22} s_2' \\ e'_{33} s_3' \end{pmatrix}$. C'est une contraction / dilatation dans les directions s_1', s_2' et s_3'.

→ Si l'écoulement est incompressible :

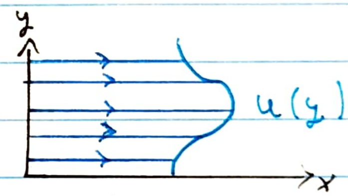
$$\sum_i e'_{ii} = Tr(e'_{ij}) = Tr(e_{ij}) = \frac{1}{2}\sum_i(\partial_i u_i + \partial_i u_i) = 0$$

Dans un fluide incompressible, la trace est nulle.

2 INTRO AUX FLUIDES VISQUEUX

2.1 Introduction

→ Considérons un écoulement cisaillé simple :
$\bar{u} = [u(y), 0, 0]$



DEF Un fluide est dit Newtonien si la force de frottement est proportionnelle au gradient de vitesse.

Ici, $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ avec μ la viscosité moléculaire

force par unité de surface

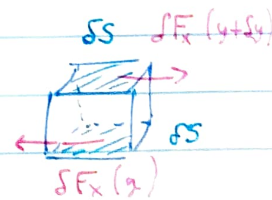
DEF On appelle viscosité cinématique la qté $\nu \equiv \mu / \rho$

2.2 Équation de Navier-Stokes

→ Calculons la force de surface due à la viscosité qui s'exerce sur un PDF :

$\delta F_x(y+\delta y) = \tau(y+\delta y).\delta S = \mu \frac{du}{dy}(y+\delta y).\delta S$

$\delta F_x(y) = -\tau(y).\delta S = -\mu \frac{du}{dy}(y).\delta S$



↳ $\sum \delta F = \mu\, \delta S \left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right)$

⇔ $\frac{\delta F}{\delta V} \equiv \delta f = \frac{\mu \delta S}{\delta S \delta y}\left(u'(y+\delta y) - u'(y)\right) = \mu \frac{d^2 u}{dy}$